Analysis

Die wichtigsten Methoden

Abiturtraining

Methodenwissen in der Analysis

Teil 1

Datei Nr. 41501

Stand: 25. März 2013

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Schnelldurchgang durch die Analysis soll Methoden ins Gedächtnis zurückzurufen.

Methodenwissen ist die Grundlage zum Bearbeiten von Analysis-Aufgaben. Daher sind die gezeigten Methoden hier immer mit einem Beispiel verbunden. Leider verlaufen die Berechnungen bei den unterschiedlichen Funktionstypen immer wieder anders, weil jede Funktionsart ihre Eigenschaften hat, die man kennen und berücksichtigen muss. Daher wird immer wieder auf andere Texte verwiesen, in denen man weiteres Übungsmaterial findet.

Um allerdings diesen Text übersichtlich zu halten, musste an Beispielen gespart werden. Er ist ja auch zum Wiederholen gedacht. Wer nachlernen muss, kann in dann an den Grundlagentexten weitere Beispiele und Aufgaben finden.

Auf vielen Seiten werden Screenshots von CAS-Rechnern wie TI Nspire CAS und CASIO ClassPad dargestellt. Sehr viele Schulen gestatten die Lösung der Abituraufgaben mit dem Einsatz solcher Rechner. Dann beherrschen die Schüler kaum mehr die manuellen Methoden, die dennoch wichtig sind, denn diese Rechner sind nur Hilfsmittel und liefern oft Ergebnisse, die man kritisch hinterfragen muss. Außerdem kann man sie nur dann sinnvoll einsetzen, wenn man genau weiß, was man tun will bzw. soll.

Gliederung des Methodentrainings:

Text 41501	1	Funktionsuntersuchungen
	2	Tangenten und Normalen
	3	Funktionenscharen
Text 41502	4	Aufstellen von Funktionsgleichungen
	5	Auswertung von Schaubildern von f bzw. f ' ohne Rechnungen
	6	Extremwertaufgaben
	7	Integralrechnung – handwerklich
	8	Integralrechnung - Anwendungen

Inhalt

Fortsetzung im Text 41502

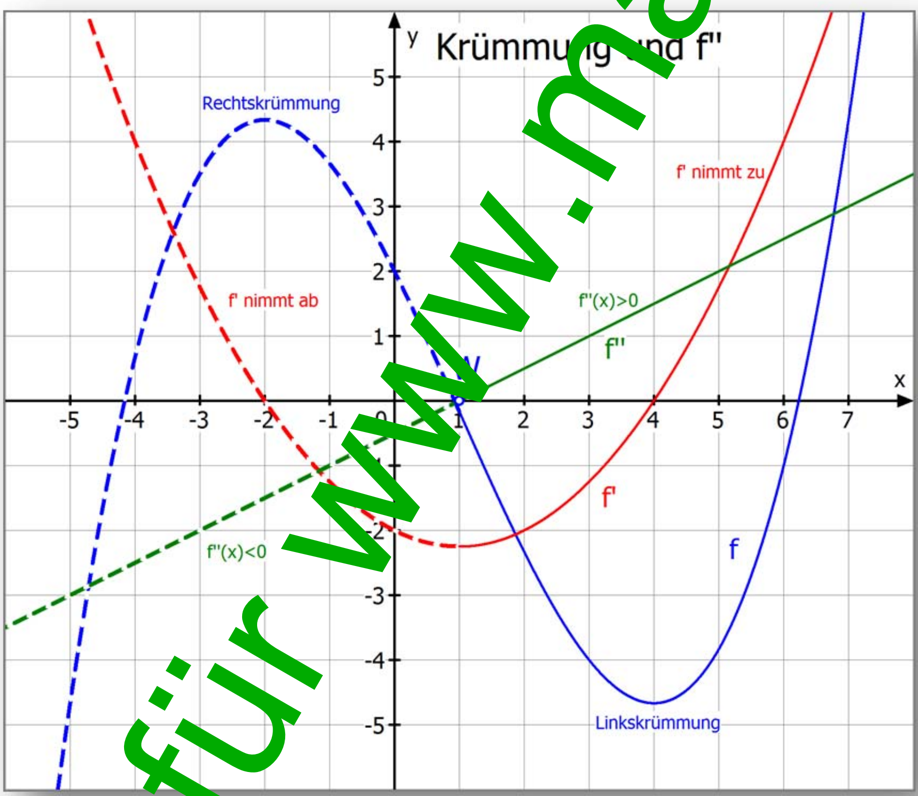
1.4 Bedeutung der 2. Ableitung für Krümmung und Wendepunkte

Die 2. Ableitung ist bekanntlich die Ableitung der 1. Ableitung. Daher kann man f'' dazu verwenden, die Änderung der f'-Werte zu beschreiben. Mit anderen Worten:

Mit f'' kann man die Zunahme und Abnahme der Tangentensteigungen ermitteln, also die **Krümmung** der Kurve.

.**Beispiel:** $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ und $f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Linkskrümmung liegt vor, wenn f' streng monoton wächst:	**Rechtskrümmung liegt vor, wenn f' streng monoton fällt.**
Die Zunahme der Funktion f' wird durch $f''(x) > 0$ beschrieben.	Die Abnahme der Funktion f' wird durch $f''(x) < 0$ beschrieben.
Ergebnis: $x > 1$	Ergebnis: $x < 1$



An der Stelle x = 1 hat f'' **Vorzeichenwechsel**, also hat das Schaubild F von f dort **Krümmungswechsel.** $W(1|0)$ ist also **Wendepunkt.**

Die Abbildung zeigt das Schaubild von f als blaue Kurve.

Der gestrichelte Kurvenbogen hat **Rechtskrümmung**. Man sieht, dass die zugehörige f'–Kurve fällt, die Tangentensteigungen also nehmen ab, und dazu gehört, dass die f''–Werte negativ sind.

Der durchgezogene Kurvenbogen hat **Linkskrümmung**. Man sieht, dass die zugehörige f'–Kurve steigt, die Tangentensteigungen nehmen zu, und dazu gehört, dass die f''– Werte positiv sind.

Rechts die Berechnung der Bereiche, in denen Linkskrümmung bzw. Rechtskrümmung vorliegt-

```
define f(x)=1/12·x^3-1/4·x^2-2x+2
                                   done
define f1(x)=diff(f(x),x,1)
                                   done
define f2(x)=diff(f(x),x,2)
                                   done
f1(x)
                    0.25·(x^2-2·x-8)
f2(x)
                           0.5·(x-1)
solve(f2(x)>0
                               {x>1}
solve(f2(x)<0
                               {x<1}
```

MERKE:

Ist in einem Intervall $f''(x) > 0$, dann hat der Graph dort **Linkskrümmung**.

Ist in einem Intervall $f''(x) < 0$, dann hat der Graph dort **Rechtskrümmung**.

An einer Stelle, wo f'' Vorzeichenwechsel hat, liegt ein **Wendepunkt**.

Dieser Vorzeichenwechsel tritt in der Regel dann ein,

wenn an einer Stelle a gilt $f''(a) = 0$.

Da dies jedoch *auch* zu Nicht-Wendepunkten führen kann, muss man den Vorzeichenwechsel von f'' durch die Überprüfung der hinreichende Bedingung $f'''(x_W) \neq 0$ nachweisen.

(Dies wird im nächsten Abschnitt ausführlicher erläutert)

1.5 Extrempunkte – Wendepunkte - Terrassenpunkte

Es gibt ein <u>Berechnungsschema</u> mit verschiedenen Ableitungen zur Berechnung dieser Punkte.

1. Die **notwendige Bedingung** $\boxed{f'(x)=0}$ liefert **Punkte mit waagrechter Tangente.**

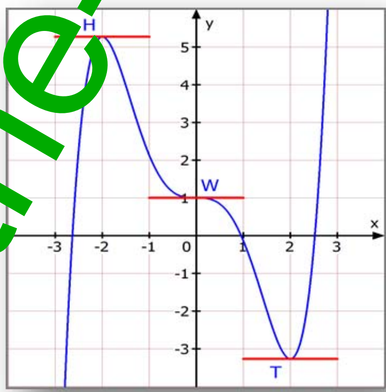
Davon gibt es drei Sorten: Hochpunkte, Tiefpunkte und Terrassenpunkte.

Um sie zu identifizieren, untersucht man mit f'' das Krümmungsverhalten an den betreffenden Stellen, man nennt dies die **hinreichende Bedingung:**

$\boxed{1}$ $f'(a)=0$ und $f''(a)<0$ **Hochpunkt bei a**
Waagrechte Tangente und Rechtskrümmung.

$\boxed{2}$ $f'(b)=0$ und $f''(b)>0$ **Tiefpunkt bei b**
Waagrechte Tangente und Linkskrümmung.

$\boxed{3}$ $f'(c)=0$ und $f''(c)=0$ und $f'''(c)\neq 0$ **Terrassenpunkt bei c**
Wendepunkt mit waagrechter Tangente.



2. Die **notwendige Bedingung** $\boxed{f''(x)=0}$ liefert **Wendepunkte und Flachpunkte.**

Um sie zu identifizieren, untersucht man, ob f'' dort das Vorzeichen wechselt.

$\boxed{4}$ Die **hinreichende Bedingung** für einen <u>Wendepunkt</u> lautet:

f'' hat an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel

Oder: $f'''(x_W)\neq 0$. Das sichert den Vorzeichenwechsel.

Also: $\boxed{f''(x_W)=0 \text{ und } f'''(x_W)\neq 0}$ ergibt einen **Wendepunkt.**

$\boxed{5}$ Wenn an einer Stelle d gilt: $f''(d)=0$ und $f'''(d)=0$, dann ist die Krümmung an der Stelle d so gering, dass man von einem **Flachpunkt** spricht.
Das <u>kann</u> dann ein Wendepunkt sein, oder auch nicht

Hinweis: Um das zu entscheiden gibt es weitere Kriterien, etwa diese:

Ist $f''(e)=0$ und $f'''(e)=0$ und $f^{IV}(e)\neq 0$, dann ist der Flachpunkt <u>kein Wendepunkt</u>.
Hat er zusätzlich $f'(e)=0$, dann liegt dort ein flacher Extrempunkt (Sattelpunkt).

Ist $f''(e)=0$ und $f'''(e)=0$ und $f^{IV}(e)=0$ aber $f^{V}(e)\neq 0$, dann ist es doch ein Wendepunkt.

Damit wird ein Schüler in der Prüfung nicht konfrontiert, obwohl schon so einfache Funktionen wie $f(x)=x^4$ und $f(x)=x^5$ zu solchen Situationen führen.

Trainingsaufgabe: (Lösung nächste Seite)

a) Die Abbildung oben gehört zur Funktion $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+1$.
Bestimme dazu die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$ mit den Ableitungen

$f'(x) = x^4 - 4x^2$ $\qquad f''(x) = 4x^3 - 8x$ $\qquad f'''(x) = 12x^2 - 8$

Extrempunkte Bed.: $\boxed{f'(x) = 0}$ $\quad x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$

Diese Gleichung ist Nullprodukt, also gibt es die Faktorenlösung:

1. Faktor = 0 $\quad x_1 = 0$ (doppelte Lösung)

2. Faktor = 0: $\quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm 2$

y-Koordinaten: $f(0) = 1$, $f(2) = \frac{32}{5} - \frac{4 \cdot 8}{3} + 1 = \frac{96 - 160 + 15}{15} = -\frac{49}{15}$, $f(-2) = ... = \frac{79}{15}$

Kontrolle (hinreichende Bedingung):

$f''(0) = 0$ aber $f'''(0) \neq 0$: $\quad W(0 \mid 1)$ ist Terrassenpunkt (Wendepunkt mit waagr.Tangente)

$f''(2) = 32 - 16 > 0$ $\quad T\left(2 \mid -\frac{49}{15}\right)$ ist Tiefpunkt.

$f''(-2) = -32 + 16 < 0$ $\quad H\left(-2 \mid \frac{79}{15}\right)$ ist Hochpunkt.

Wendepunkte: Bed.: $\boxed{f''(x) = 0}$ $\quad 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0$. (Nullprodukt)

1. Faktor = 0: $\quad x_1 = 0$ $\quad$ Schon bekannt (Terrassenpunkt).

2. Faktor = 0: $\quad x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{4,5} = \pm\sqrt{2}$

y-Koordinaten: $f(\sqrt{2}) = ... \approx -1{,}64$, $f(-\sqrt{2}) \approx 3{,}64$

Kontrolle (hinreichende Bedingung):

$f'''(\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 8 \neq 0$ und $f'''(-\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 8 \neq 0$.

Also hat das Schaubild außer dem Terrassenpunkt noch zwei Wendepunkte:

$W_2(\sqrt{2} \mid -1{,}64)$, $W_3(-\sqrt{2} \mid 3{,}64)$

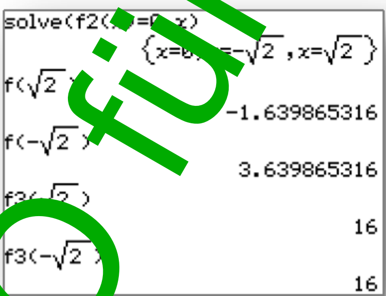
Screenshot von CASIO ClassPad:

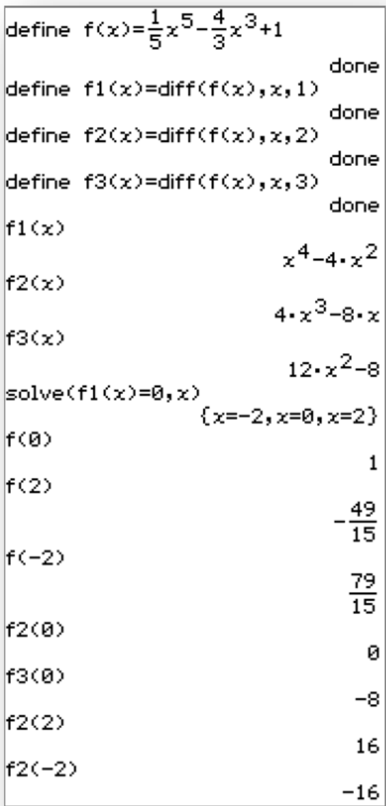
Zuerst die Funktion und drei Ableitungsfunktionen definieren.
Diese lässt man sich anzeigen.

Dann Lösung der Extremwertbedingung (solve(f1(x)=0,x)

Dazu Funktionswerte und Kontrolle (hinr. Bed.) berechnen.

Auf dem kleinen Screenshot die **Wendepunktberechnung.**





Noch zwei Trainingsaufgaben zur Lösung mit CAS:

Bestimme Extrem- und Wendepunkte für die Funktionen:

b) $f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$ $\qquad$ c) $f(x) = 4 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$

Lösung zu b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$

Lösung in Kurzform mit CASIO ClassPad

Nullstellen: $\boxed{f(x) = 0}$

Zähler = 0: $x = -\frac{3}{2}$

Nenner = 0: $x = -1$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)$

Polstelle $x = 1$

Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Extrempunkte: $\boxed{f'(x) = 0}$

$2x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = -2$

y-Koordinate: $f(-2) = -1$

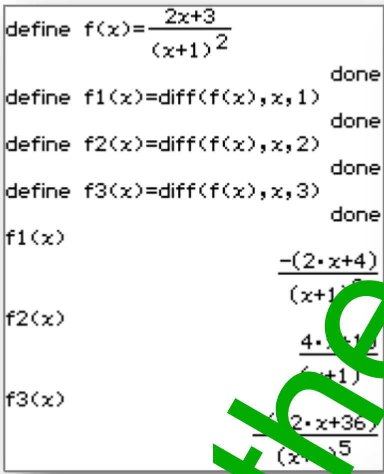
Kontrolle: $f''(-2) > 0 \quad \Rightarrow \quad T(-2 \mid -1)$

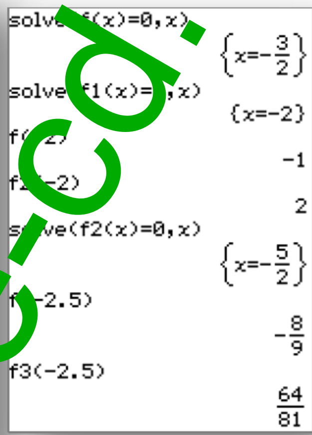
Wendepunkte: $\boxed{f''(x) = 0}$

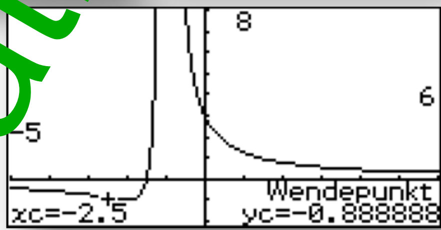
$4x+10=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = -\frac{5}{2}$

y-Koordinate: $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{9}$

Kontrolle: $f'''\left(-\frac{5}{2}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(-\frac{5}{2} \mid -\frac{8}{9}\right)$







Lösung zu c) $f(x) = 4\cdot\left(x^2-1\right)\cdot e^{-x}$

Lösung in Kurzform mit TI Nspire CAS:

Nullstellen: $\boxed{f(x) = 0}$ $\quad x_{1,2} = \pm 1$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2}(\pm 1 \mid 0)$

Extrempunkte: $\boxed{f'(x) = 0}$ $\quad x_E = 1 \pm \sqrt{2} \approx \begin{cases} 0{,}41 \\ 2{,}41 \end{cases}$

$f\left(1-\sqrt{2}\right) \approx -5{,}01, \quad f''\left(1-\sqrt{2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad T(0{,}41 \mid -5{,}01)$

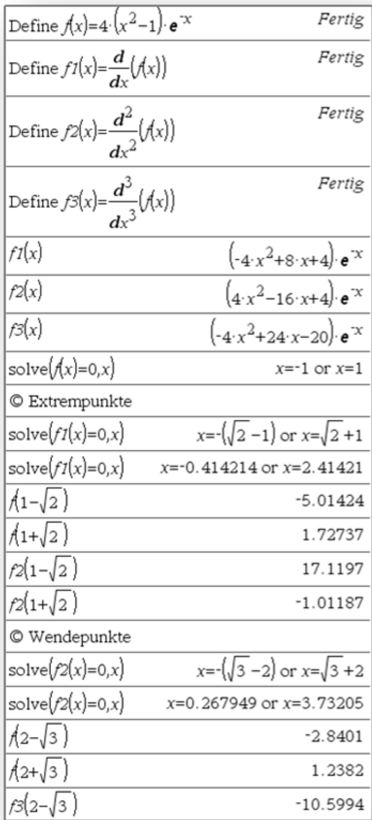
$f\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 1{,}7, \quad f''\left(1+\sqrt{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad H(2{,}4 \mid 1{,}7)$

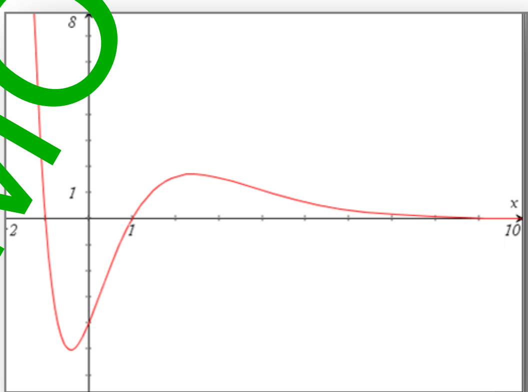
Wendepunkte: $\boxed{f''(x) = 0}$ $\quad x_W = 2 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} 0{,}27 \\ 3{,}73 \end{cases}$

$f\left(2-\sqrt{3}\right) \approx -2{,}8, \quad f'''\left(2-\sqrt{3}\right) \neq 0$

$f\left(2+\sqrt{3}\right) \approx 1{,}23, \quad f'''\left(2+\sqrt{3}\right) \neq 0$

Erg.: $W_1(0{,}27 \mid -2{,}8), \quad W_2(3{,}7 \mid 1{,}2)$





1.6 Spezielle Funktionseigenschaften

Übersicht: Durch die Berechnung wichtiger Kurvenpunkte wie Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte kann man den Verlauf in einem relativ begrenzten Bereich um den Koordinatenursprung berechnen.

Doch wie der Graph der Funktion außerhalb des Zeichenblattes verläuft, erfordert noch andere Untersuchungen. Die Methoden dazu folgen hier.

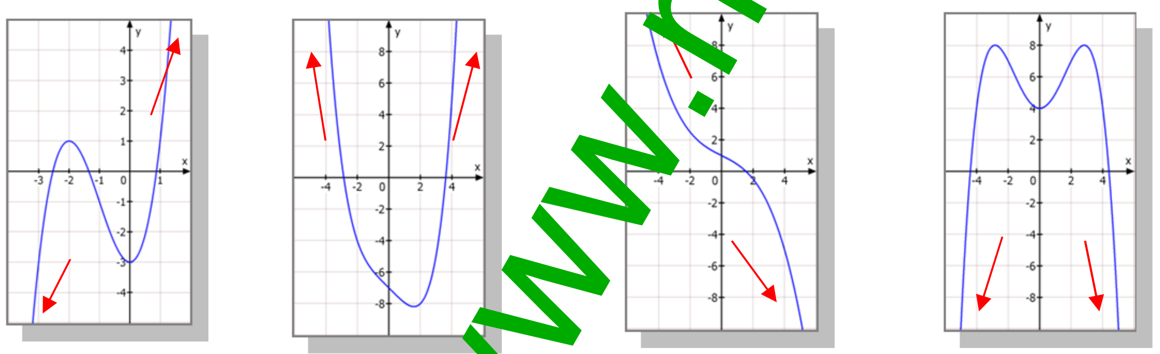
Ich wiederhole hier nur Fakten. Für mehr Details, Begründungen, Beispiele wird auf andere Texte verwiesen, wo man alles reichlich findet.

1.6.1 Ganzrationale Funktionen (Siehe Text 42031)

Diese Funktionen haben den Definitionsbereich **D** $= \mathbb{R}$ und sind überall stetig.
Das heißt, ihre Graphen machen keine Sprünge, denn die Grenzwerte der Funktionen führen stets zum Funktionswert: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Es gibt genau 4 Möglichkeiten, wie sich eine ganzrationale Funktion außerhalb des Zeichenblattes verhalten kann:

$f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ $f_2(x) = \frac{1}{16}x^4 - x - 7$ $f_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + 1$ $f_4(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2 + 4$



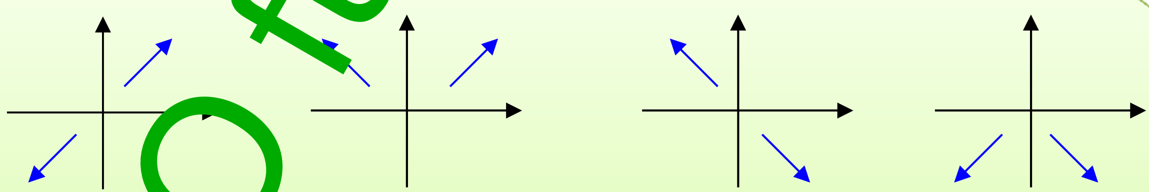
Für $x \to \infty$: (nach rechts)

$f_1(x) \to \infty$ $f_2(x) \to \infty$ $f_3(x) \to -\infty$ $f_4(x) \to -\infty$

Für $x \to -\infty$: (nach links)

$f_1(x) \to -\infty$ $f_2(x) \to \infty$ $f_3(x) \to \infty$ $f_4(x) \to -\infty$

Dieses Verhalten wird durch den Summanden mit dem höchsten Exponenten bestimmt.
An ihm erkennt man welches Verhalten f zeigt:



$f(x) = pos \cdot x^{ungerade} + ..$ $f(x) = pos \cdot x^{gerade} + ..$ $f(x) = neg \cdot x^{ungerade} + ..$ $f(x) = neg \cdot x^{gerade} + ..$

z. B. $f_1(x) = \boxed{\frac{1}{16} \cdot x^3} + ...$ $f_2(x) = \boxed{\frac{1}{16} \cdot x^4} + ...$ $f_1(x) = \boxed{-\frac{1}{16} \cdot x^3} + ...$ $f_1(x) = \boxed{-\frac{1}{16} \cdot x^4} + ...$

Ganzrationale Funktionen mit ungeradem Exponenten haben die **Wertmenge W** $= \mathbb{R}$.

Die Graphen ganzrationaler Funktionen besitzen keine Asymptoten.

Beispiele einer Kurvendiskussion

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$, $f''(x) = 3x - 8$. $f'''(x) = 3$

Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$ $\quad \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x = 0 \quad | \cdot 2$ und x ausklammern

$x \cdot (x^2 - 8x + 16) = 0$ Nullprodukt!

1. Faktor: $x_1 = 0$

2. Faktor: $x^2 - 8x + 16 = 0 \qquad x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$ doppelt!

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0|0)$ und $N_2(4|0)$ (Berührpunkt)

Extrempunkte: Bed.: $f'(x) = 0$ $\quad \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = 0$

$$x_E = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{3} = \frac{8 \pm 4}{3} = \begin{cases} 4 \\ \frac{3}{4} \end{cases}$$

y-Koordinaten: $f(4) = 0$ Das war die Nullstelle

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27} - 4 \cdot \frac{16}{9} + 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32 - 192 + 288}{27} = \frac{128}{27} \approx 4,74$

Kontrolle $\quad f''(4) > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum

$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -4 - 8 < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum.

Hochpunkt: $H\left(\frac{4}{3} \,|\, \frac{128}{27}\right)$ $\qquad$ Tiefpunkt: $T(4|0)$

Wendepunkte: Bed.: $3x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_W = -\frac{8}{3}$

y-Koordinate: $f\left(-\frac{8}{3}\right) = ... = \frac{64}{27} \approx 2,37$

Kontrolle: $f'''\left(-\frac{8}{3}\right) \neq 0$

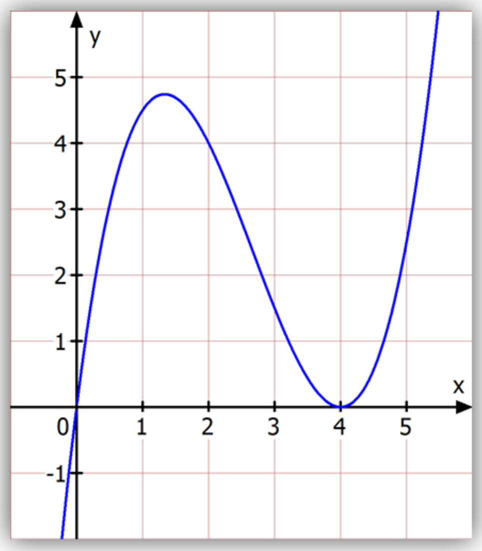
Wendepunkt: $W\left(-\frac{8}{3} \,|\, \frac{64}{27}\right)$

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x = x^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right)$

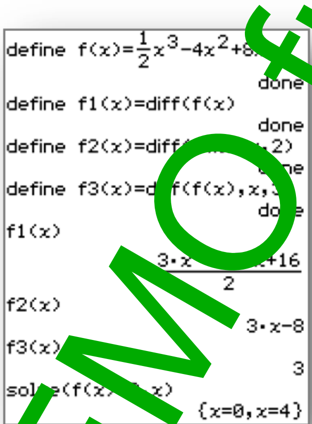
Für $x \to \pm\infty$ geht die Klammer gegen $\frac{1}{2}$. Also verhält sich f wie $g(x) = \frac{1}{2}x^3$:

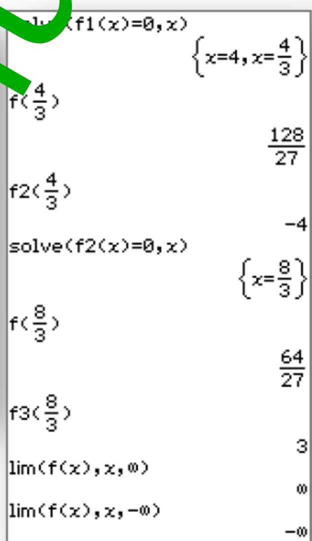
Für $x \to \infty$ folgt $f(x) \to \infty$ und für $x \to -\infty$ folgt $f(x) \to -\infty$.

Wertmenge: Da f stetig ist, folgt $\mathbf{W} = \mathbb{R}$.



CAS-Screenshot (CASIO ClassPad)





(2) $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2$

Ableitungen: $f'(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+3x$, $f''(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3$, $f'''(x)=3x-\frac{9}{2}$

Nullstellen: Bed.: $f(x)=0$ $\quad \frac{1}{8}x^4-\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2=0 \;|\cdot 8$ und x^2 ausklammern

$x^2\cdot(x^2-6x+12)=0$ Nullprodukt!

1. Faktor: $x_1=0$ doppelte Lösung (Berührstelle)

2. Faktor: $x^2-6x+12=0$ $\quad x_{2,3}=\frac{6\pm\sqrt{36-48}}{2}\notin\mathbb{R}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0\,|\,0)$ (Berührpunkt)

Extrempunkte: Bed.: $f'(x)=0$ $\quad \frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+3x=0 \;|\cdot 4$ ergibt $2x^3-9x^2+12x=0$

$x\cdot\left(2x^2-9x+12\right)=0$

1. Faktor: $x_1=0$

2. Faktor: $2x^2-9x+12=0 \Rightarrow x_E=\frac{9\pm\sqrt{81-96}}{2}\notin\mathbb{R}$

Kontrolle: $f''(0)=3>0 \Rightarrow$ relatives Minimum.

Tiefpunkt: $T(0\,|\,0)$, kein Hochpunkt.

Wendepunkte: Bed.: $f''(x)=0$ $\quad \frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3=0 \;|\cdot\frac{2}{3}$!!! $\quad x^2-3x+2=0$

$x_W=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$

y-Koordinaten: $f(1)=\frac{7}{8}$, $f(2)=2$

Kontrollen: $f'''(1)\neq 0$, $f'''(2)\neq 0$

Wendepunkte: $W_1(1\,|\,\frac{7}{8})$, $W_2(2\,|\,2)$.

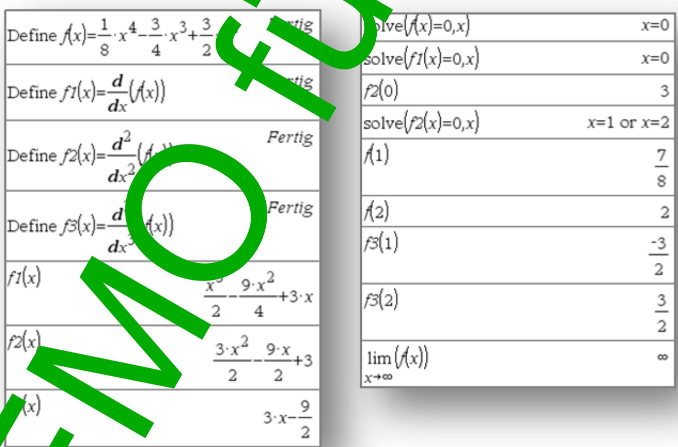
Verhalten für $x\to\pm\infty$: $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2=x^4\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)$

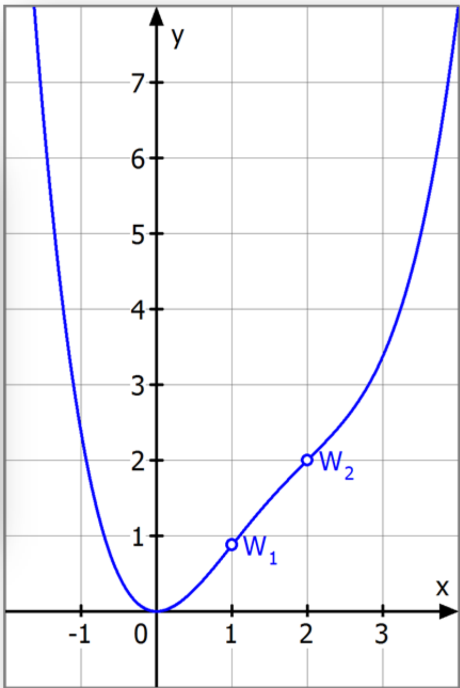
Die Klammer geht für $x\to\pm\infty$ gegen $\frac{1}{8}$. Also verhält sich f wie $g(x)=\frac{1}{8}x^4$:

Für $x\to\pm\infty$ folgt $f(x)\to\infty$.

Wertmenge: $W=[0\,;\infty[$

CAS-Screenshot (TI Nspire)





1.6.2 Gebrochen rationale Funktionen (Siehe Text 43001) *WISSEN:*

1. Die Graphen gebrochen rationaler Funktionen können senkrechte Asymptoten besitzen.

Die kritischen Stellen sind bei diesen Funktionen die Nullstellen des Nenners. Da man nicht durch 0 dividieren kann, muss man diese aus dem Definitionsbereich herausnehmen.

Zur weiteren Analyse wird folgende Methode empfohlen. **Beispiel** $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}$

Vorarbeit :

Zähler = 0: $x\cdot(x+1)=0 \iff x_1=0,\ x_2=-1$

Nenner = 0: $x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff x_{2,3}=\pm1.$

Auswertung:

$\boxed{Z=0 \text{ und } N\neq0}$: Nullstelle der Funktion: $x_1=0.$

$\boxed{N=0 \text{ und } Z\neq0}$: Polstelle der Funktion: $x_3=1$

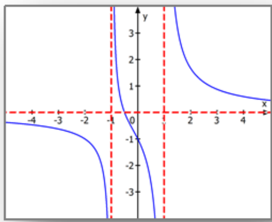
$\boxed{Z=0 \text{ und } N=0}$ hier: Loch im Graphen bei $x_2=-1.$

Nähert man sich einer **Polstelle** an, gehen die Funktionswerte gegen $\pm\infty$. MERKE:
Dort wo die Funktion eine **Polstelle** hat, besitzt das Schaubild eine **senkrechte Asymptote**.

2. Das Verhalten der Funktionen für $x\to\pm\infty$ hängt vom Grad des Zählers und des Nenners ab. Hier kann es waagrechte oder schräge Asymptoten geben oder gar Näherungskurven.

1. Fall: **Grad Zähler < Grad N:**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{1-0}=0$$



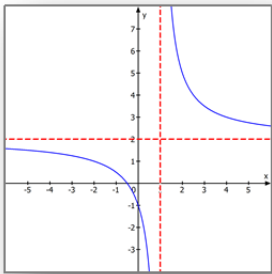
Man kürzt durch die höchste x-Potenz des Nenners.

Weil im Nenner ein höherer Grad steht, erhält man wie hier immer den Grenzwert 0.

Folgerung: Das Schaubild hat die x-Achse als waagrechte Asymptote: $y=0$

2. Fall: **Grad Zähler = Grad N:**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{1-0}=2$$



Man kürzt durch die höchste x-Potenz des Nenners.

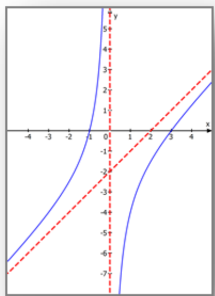
Dadurch erhält man in Zähler und Nenner eine Zahl $\neq0$ als Grenzwert, und das gilt dann auch für den Funktionsterm.

Folgerung: Das Schaubild hat eine Parallele zur x-Achse als waagrechte Asymptote. Hier: y = 2

3. Fall: **Grad Zähler = Grad N + 1:**

Dann besitzt die Funktion für $x\to\pm\infty$ keinen Grenzwert.
Man kann aber zeigen, dass das Schaubild eine **schräge Asymptote** besitzt.

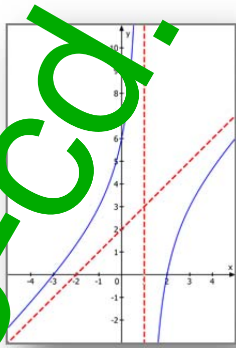
Beispiel $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x}=\boxed{x-2}-\frac{3}{x}$



Der Nenner enthält keine Summe, daher diese Zerlegung!

Wegen $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}=0$ verhält sich f für $x\to\pm\infty$ genauso wie $g(x)=x-2$, deren Schaubild daher eine **schräge Asymptote** ist.

Beispiel $f(x)=\dfrac{x^2+x-8}{x-1}=\boxed{x+2}-\dfrac{4}{x-1}$



Da der Nenner eine Summe/Differenz enthält, gelingt diese Zerlegung mit Polynomdivision oder im CAS-Rechner:

$$
\begin{array}{l}
(x^2+x-6):(x-1)=x+2\\
-(x^2-x)\\
\hline
\quad 2x-6\\
\quad -(2x-2)\\
\hline
\quad\quad -4 \quad \text{Divisionsrest}
\end{array}
$$

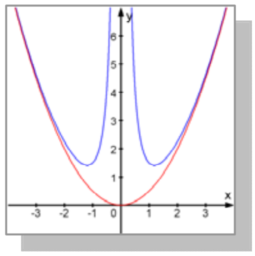
```
propFrac((x^2+x-6)/(x-1))
                         x-4/(x-1)+2
```

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ verhält sich f für $x\to\pm\infty$ genauso wie $g(x)=x+2$, deren Schaubild daher die schräge Asymptote ist.

4. Fall: **Grad Zähler = Grad N + 2:**

Dann besitzt die Funktion für $x\to\pm\infty$ keinen Grenzwert.
Man kann aber zeigen, dass das Schaubild eine **Näherungsparabel** besitzt.

Beispiel $f(x)=\dfrac{x^4+2}{2x^2}=\boxed{\dfrac{1}{2}x^2}+\dfrac{1}{x^2}$



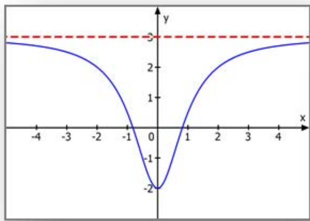
Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ verhält sich f für $x\to\pm\infty$ genauso wie $g(x)=\frac{1}{2}x^2$, deren Schaubild daher die Näherungsparabel ist.

Hinweis

Oftmals werden gebrochen rationale Funktionen bereits in zerlegter Summenform gegeben.
Dann kann man Asymptote oder Näherungskurve sofort ohne weitere Umformung ablesen:

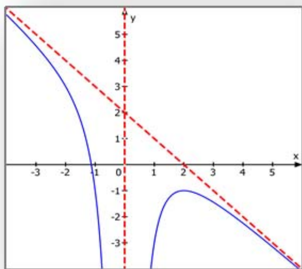
$f(x)=3-\dfrac{5}{x^2+1}$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x^2+1}=0$ verhält sich f für $x\to\pm\infty$ wie $g(x)=3$, deren Schaubild daher eine **waagrechte Asymptote** ist: $y=3$



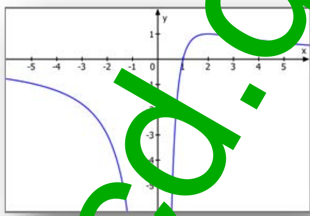
$f(x)=2-x-\dfrac{4}{x^2}$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$ verhält sich f für $x\to\pm\infty$ wie $g(x)=2-x$, deren Schaubild daher eine **schräge Asymptote** ist: $y=-x+2$



Sehr viele Übungsbeispiele findet man im Text 43001

5 ausführliche Beispiele (Sehr viel mehr im Text 43001)



Beispiel 1 $f(x) = 4\frac{x-1}{x^2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

Vorarbeit: $Z = 0:$ $x = 1$
$N = 0:$ $x = 0$ (doppelte Lösung)

Auswertung: Nullstelle: $(Z = 0, N \neq 0):$ $x_N = 1$
Polstelle: $(N = 0, Z \neq 0):$ $x_P = 0$

Dies ist (wegen der doppelten Nullstelle des Nenners) ein Pol ohne Vorzeichenwechsel.

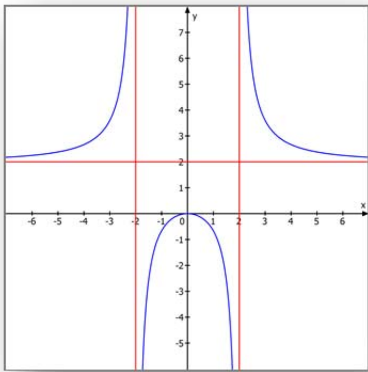
Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Folgerung: Schnittpunkt des Graphen K mit der x-Achse: $N(1 \mid 0)$
Senkrechte Asymptote: $x = 0$ (y-Achse)

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0$ denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Folgerung: Die Gerade y = 0 (x-Achse) ist waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$.

Hinweis: Am Merkmal, dass der Grad des Zählers kleiner war als der des Nenners, konnte man sofort erkennen, dass die x-Achse waagrechte Asymptote ist.



Beispiel 2 $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

Vorarbeit: $Z = 0:$ $x = 0$ (doppelte Lösung)
$N = 0:$ $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Auswertung: Nullstelle: $(Z = 0, N \neq 0):$ $x_N = 0$
Doppelte Nullstelle ist Berührstelle.
Polstellen: $(N = 0, Z \neq 0):$ $x_P = \pm 2$

Es sind einfache Nullstellen des Nenners, also Pole mit Vorzeichenwechsel. (Der Vorzeichenwechsel bezieht sich auf die unterschiedliche Annäherung von links bzw. rechts an die Asymptoten.)

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Folgerung: Berührpunkt des Graphen K mit der x-Achse: $N(0 \mid 0)$
Senkrechte Asymptoten: $x = 2$ und $x = -2$.

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$ denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0$

Hierbei ist durch x^2 gekürzt worden.

Folgerung: K hat für $x \to \pm\infty$ die waagrechte Asymptote $y = 2$.

Zusatz: Weil f nur gerade x-Potenzen hat, gilt $f(-x) = f(x)$,
d.h. K ist symmetrisch zur y-Achse.

Hinweis: Am Merkmal, dass Zähler und Nenner denselben Grad besitzen, konnte man sofort erkennen, dass K eine waagrechte Asymptote besitzt, aber nicht die x-Achse.